



CIĄG GEOMETRYCZNY

DEFINICJA

CIĄG NAZYWAMY GEOMETRYCZNYM JEŻELI MA CO NAJMNIEJ TRZY WYRAZY I KAŻDY JEGO WYRAZ (Z WYJĄTKIEM PIERWSZEGO) **POWSTAJE PRZEZ POMNOŻENIE POPRZEDNIEGO WYRAZU PRZEZ TĄ SAMĄ LICZBĘ q**

$$a_{n+1} = q \cdot a_n$$

LICZBĘ q NAZYWAMY ILORAZEM CIĄGU GEOMETRYCZNEGO, BO

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

PRZYKŁADY

- $(1, 2, 4, 8, 16, \dots)$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $q = 2$
- $(1, -1, 1, -1, 1, \dots)$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $q = -1$
- $(27, 9, 3, 1, \dots)$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $q = \frac{1}{3}$

CIĄG GEOMETRYCZNY

Sprawdź, czy podany ciąg jest ciągiem geometrycznym $a_n = \frac{2^n}{3}$

MUSI WYSTĘPOWAĆ
STAŁY ILORAZ

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3}$$

$$q = \frac{\frac{2^{n+1}}{3}}{\frac{2^n}{3}} = \frac{2^{n+1}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

WYSTĘPUJE
STAŁY ILORAZ

CIĄG GEOMETRYCZNY – wzór ogólny

JEŻELI MAMY DO CZYNIEŃ Z CIĄGIEM GEOMETRYCZNYM,
TO:

$$a_2 = q \cdot a_1$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = \underbrace{a_1 \cdot q}_{a_2} \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = \underbrace{a_1 \cdot q^2}_{a_3} \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

$$a_5 = a_1 \cdot q^4$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

CIAŁG GEOMETRYCZNY - PRZYKŁADY

Oblicz 15 wyraz ciągu geometrycznego,
w którym

$$a_1 = 32 \text{ i } q = \frac{1}{2}.$$

$$a_{15} = q^{14} \cdot a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{14} \cdot 32 = 2^{-14} \cdot 2^5 =$$

$$2^{-9} = \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512}$$

CIAŁG GEOMETRYCZNY - PRZYKŁADY

Oblicz 8 wyraz ciągu geometrycznego,
w którym

$$a_3 = \frac{1}{9} \text{ i } q = 3$$

$$a_3 = a_1 \cdot q^2$$

$$\frac{1}{9} = a_1 \cdot 9 \quad / : 9$$

$$a_1 = \frac{1}{81}$$

$$a_n = q^{n-1} \cdot a_1$$

$$a_8 = a_1 \cdot q^7 = \frac{1}{81} \cdot 3^7 = 3^{-4} \cdot 3^7 = 3^3 = 27$$

CIAŁG GEOMETRYCZNY - PRZYKŁADY

Oblicz 10 wyraz ciągu geometrycznego, jeżeli

$$a_2 = \frac{1}{2} \text{ i } a_5 = -4$$

obliczamy
 q i a_1

$$\frac{a_5}{a_2} = \frac{a_1 \cdot q^4}{a_1 \cdot q} = q^3$$

$$q^3 = \frac{-4}{\frac{1}{2}} = -4 \cdot 2 = -8$$

$$q = \sqrt[3]{-8} = -2$$

$$a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{1}{2} \div (-2) = -\frac{1}{4}$$

$$a_{10} = a_1 \cdot q^9 = \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (-2^9) = 128$$

CIĄG GEOMETRYCZNY

Każdy wyraz ciągu geometrycznego jest średnią geometryczną swoich sąsiadów (wyrazu poprzedniego i następnego):

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \quad \text{lub} \quad a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

$$(3, 6, 12, 24, 48)$$

$$(2, 6, 18, 54, 162)$$

CIAŁG GEOMETRYCZNY - PRZYKŁADY

Pomiędzy liczby 6 i 96 wstaw liczbę x tak, aby ciąg $(6, x, 96)$ był ciągiem geometrycznym.

$$x^2 = 6 \cdot 96$$

$$x^2 = 576 \quad / \sqrt{}$$

$$x = 24 \text{ lub } x = -24$$

CIĄG GEOMETRYCZNY

zadania maturalne CKE

Zadanie 13. (1 pkt)

Liczby: $x-2$, 6, 12, w podanej kolejności, są trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Liczba x jest równa

A. 0

B. 2

C. 3

D. 5

$$6^2 = 12(x - 2)$$

$$36 = 12x - 24 \Rightarrow 12x = 60 \Rightarrow x = 5$$

CIĄG GEOMETRYCZNY CKE

Zadanie 14. (1 pkt)

Ciąg geometryczny (a_n) określony jest wzorem $a_n = -\frac{3^n}{4}$ dla $n \geq 1$. Iloraz tego ciągu jest równy

A. -3

B. $-\frac{3}{4}$

C. $\frac{3}{4}$

D. 3

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-\frac{3^{n+1}}{4}}{-\frac{3^n}{4}} = \frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3^{n+1-n} = 3$$

CIĄG GEOMETRYCZNY CKE

Zadanie 12. (1 pkt)

Ciąg $(27, 18, x+5)$ jest geometryczny. Wtedy

A. $x = 4$

B. $x = 5$

C. $x = 7$

D. $x = 9$

$$18^2 = 27(x+5)$$

$$324 = 27x + 135 \Rightarrow 27x = 189 \Rightarrow x = 7$$

CIĄG GEOMETRYCZNY CKE

Zadanie 16. (0–1)

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, w którym $a_1 = 27$ oraz $a_2 = 9$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Czwarty wyraz ciągu (a_n) jest równy

A. $\frac{1}{3}$

B. 1

C. 3

D. 729

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 = 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 1$$

CIĄG GEOMETRYCZNY CKE

Zadanie 17. (0–1)



Ciąg geometryczny (a_n) , o wszystkich wyrazach rzeczywistych różnych od 0, jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Wyrazy tego ciągu spełniają warunek $a_3 = -8 \cdot a_6$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Iloraz ciągu (a_n) jest równy

A. (-2)

B. $\left(-\frac{1}{2}\right)$

C. $\frac{1}{2}$

D. 2

$$a_3 = -8a_6$$

$$\frac{a_3}{a_6} = -8$$

$$\frac{a_6}{a_3} = -\frac{1}{8} = q^3 \quad q = -\frac{1}{2}$$

CIĄG GEOMETRYCZNY - ZADANIA

1. Oblicz 7 wyraz ciągu geometrycznego, jeżeli:

$$a) a_1 = -4 \text{ i } q = -3 \qquad b) a_3 = 6 \text{ i } q = \frac{1}{3};$$

$$c) a_4 = 8 \text{ i } a_5 = -4 \qquad d) a_2 = \frac{1}{6} \text{ i } a_5 = \frac{9}{16}$$

2. Ustal, czy podany ciąg jest ciągiem geometrycznym $a_n = (-1)^{n+2} \cdot n$

3. Informator maturalny od 2015

Zadanie 19. (0–1)

Liczby -8 , 4 i $x+1$ (w podanej kolejności) są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Wówczas liczba x jest równa

A. -3

B. $-1,5$

C. 1

D. 15