

CIĄGI I ICH WŁASNOŚCI

HARALD KAJZER ZST NR 2 im. Mariana Batko

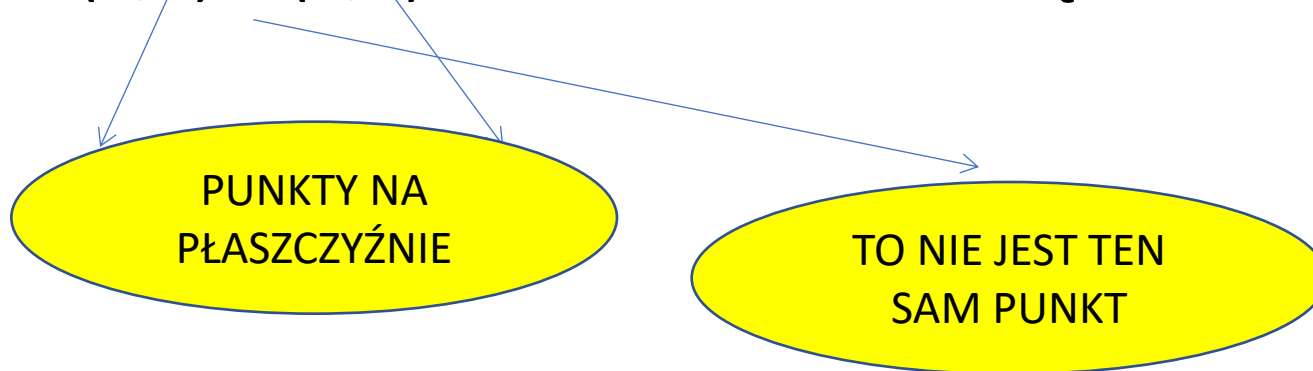
CIĄGI I ZBIORY

$\{1,2\}$ - ZBIÓR DWUELEMENTOWY

$\{1,2\}=\{2,1\}$ - TAKIE ZBIORY SĄ RÓWNE

$(1,2)$ - CIĄG DWUWYRAZOWY

$(1,2) \neq (2,1)$ - TAKIE CIĄGI NIE SĄ RÓWNE



CIĄGI

CIĄG JEST SUBTELNIJSZĄ ODMIANĄ ZBIORU:

W CIAGU INTERESUJE NAS NIE TYLKO, CZY
ELEMENT W CIĄGU SIĘ ZNAJDUJE, ALE TAKŻE NA
KTÓRYM MIEJSCU SIĘ ZNAJDUJE

$(1, 2)$
 $\swarrow$ $\searrow$
 a_1 – pierwszy wyraz a_2 – drugi wyraz

CIAŁ JAKO FUNKCJA ARGUMENTU NATURALNEGO

CIAŁIEM NAZYWAMY FUNKCJĘ, DLA KTÓREJ
ARGUMENTAMI SĄ LICZBY NATURALNE,
A WARTOŚCIAMI LICZBY RZECZYWISTE.

$$f(n) = a_n$$

NP.

$$f(n) = \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}$$

$$a_1 = \frac{(-1)^{1+2}}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

pierwszy wyraz ciągu

$$a_2 = \frac{(-1)^{2+2}}{2+1} = \frac{1}{3}$$

drugi wyraz ciągu

$$a_3 = \frac{(-1)^{3+2}}{1+3} = -\frac{1}{4}$$

trzeci wyraz ciągu itd.

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots\right)$$

CIAŁGI - PRZYKŁADY

CIĄG NAZYWAMY SKOŃCZONYM, JEŻELI
ZBIOREM JEGO ARGUMENTÓW JEST PEWIEN
SKOŃCZONY PODZBIÓR ZBIORU LICZB
NATURALNYCH

ZNAJDŹ SZEŚĆ POCZĄTKOWYCH WYRAZÓW CIĄGU

$$a_n = n \cdot (-1)^{2n+1} + n$$

$$a_1 = 1 \cdot (-1)^3 + 1 = 0$$

$$a_4 = 4 \cdot (-1)^9 + 4 = 0$$

$$a_2 = 2 \cdot (-1)^5 + 2 = 0$$

$$a_5 = 5 \cdot (-1)^{11} + 5 = 0$$

$$a_3 = 3 \cdot (-1)^7 + 3 = 0$$

$$a_6 = 6 \cdot (-1)^{13} + 6 = 0$$

CIĄG ROSNĄCY (NIEMALEJĄCY)

CIĄG NAZYWAMY ROSNĄCYM, JEŻELI KAŻDY JEGO WYRAZ JEST MNIEJSZY (NIEWIEKSZY) OD WYRAZU NASTĘPNEGO.

$$a_n < a_{n+1} \quad (a_n \leq a_{n+1})$$

DO CELÓW RACHUNKOWYCH WYGODNIEJ JEST STOSOWAĆ NIERÓWNOŚĆ W POSTACI:

$$a_n - a_{n+1} < 0 \quad (a_n - a_{n+1} \leq 0)$$

CIAŁG MALEJĄCY (NIEROSNĄCY)

CIAŁG NAZYWAMY MALEJĄCYM, JEŻELI KAŻDY JEGO WYRAZ JEST WIĘKSZY (NIEMNIEJSZY) OD WYRAZU NASTĘPNEGO.

$$a_n > a_{n+1} \quad (a_n \geq a_{n+1})$$

DO CELÓW RACHUNKOWYCH WYGODNIEJ JEST STOSOWAĆ NIERÓWNOŚĆ W POSTACI:

$$a_n - a_{n+1} > 0 \quad (a_n - a_{n+1} \geq 0)$$

CIĄG ROSNĄCY

PRZYKŁAD

$$b_n = 2n - 5$$

WYZNACZAMY WYRAZ

$$b_{n+1}$$

$$b_{n+1} = 2(n+1) - 5 = 2n + 2 - 5 = 2n - 3$$

BADAMY ZNAK RÓŻNICY

$$b_n - b_{n+1}$$

$$b_n - b_{n+1} = 2n - 5 - (2n - 3) = -2 < 0$$

CIĄG ROSNĄCY

CIĄG MALEJĄCY

PRZYKŁAD

$$c_n = -\frac{1}{2}n + 3$$

WYZNACZAMY WYRAZ

$$c_{n+1}$$

$$c_{n+1} = -\frac{1}{2}(n+1) + 3 = -\frac{1}{2}n - \frac{1}{2} + 3 = -\frac{1}{2}n + \frac{5}{2}$$

BADAMY ZNAK RÓŻNICY

$$c_n - c_{n+1}$$

$$c_n - c_{n+1} = -\frac{1}{2}n + 3 - \left(-\frac{1}{2}n + \frac{5}{2}\right) = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} > 0$$

CIĄG MALEJĄCY

CIAŁGI

OBLICZ PIĘĆ POEZATKOWYCH WYRAZÓW
CIAŁGU OKREŚŁONEGO WZOREM $b_n = (-1)^{n+1} \cdot (n + 1)$
ORAZ PRZEDSTAW WYRAZY TEGO CIAŁGU
NA WYKRESIE.

$$b_1 = (-1)^2 \cdot 2 = 2$$

$$b_4 = (-1)^5 \cdot 5 = -5$$

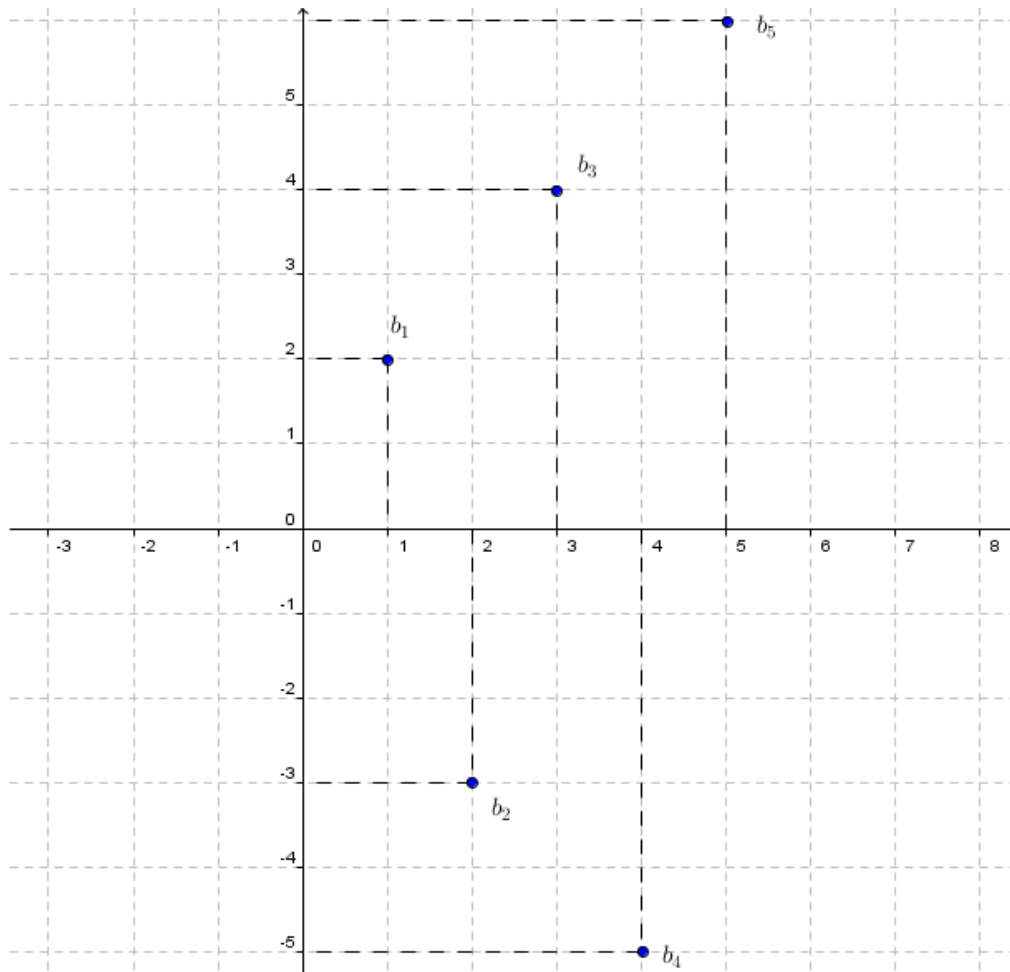
$$b_2 = (-1)^3 \cdot 3 = -3$$

$$b_5 = (-1)^6 \cdot 6 = 6$$

$$b_3 = (-1)^4 \cdot 4 = 4$$

WYKRES CIĄGU

NARYSUJMY WYKRES CIĄGU Z POPRZEDNIEGO SLAJDU



$$b_n = (-1)^{n+1} \cdot (n+1)$$

PUNKTÓW NIE ŁĄCZYMY.
WYKRES CIĄGU STANOWIĄ
TYLKO PUNKTY

CIAŁGI –ZADANIA

matura próbna z OPERONEM 2013

Zadanie 13. (1 pkt)

Ciąg (b_n) określony jest wzorem $b_n = (-1)^{2n+3}(n+1)$. Suma dwóch pierwszych wyrazów tego ciągu jest równa:

A. -5

B. -1

C. 1

D. 5

$$b_1 = (-1)^{2 \cdot 1 + 3} \cdot (1 + 1) = (-1)^5 \cdot 2 = -2$$

$$b_2 = (-1)^{2 \cdot 2 + 3} \cdot (2 + 1) = (-1)^7 \cdot 3 = -3$$

$$b_1 + b_2 = -2 + (-3) = -5$$

CIAŁGI –ZADANIA

arkusz maturalny MAJ 2012

Zadanie 18. (1 pkt)

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2-n}{n^2}$ dla $n \geq 1$. Wówczas wyraz a_5 tego ciągu jest równy

A. $-\frac{3}{25}$

B. $\frac{3}{25}$

C. $-\frac{7}{25}$

D. $\frac{7}{25}$

$$a_5 = (-1)^5 \frac{2-5}{5^2} = -1 \cdot \frac{-3}{25} = \frac{3}{25}$$

CIAŁGI –ZADANIA

informator maturalny od 2010

Zadanie 17. (1 pkt)

Ciag (a_n) jest określony wzorem $a_n = (-1)^n(n^2 - 2n)$ dla $n \geq 1$. Wtedy

A. $a_3 > 3$

B. $a_3 = 3$

☒ C. $a_3 < 2$

D. $a_3 = 2$

$$a_3 = (-1)^3 \cdot (3^2 - 2 \cdot 3) = -1 \cdot 3 = -3$$

CIAŁGI –ZADANIA

informator maturalny od 2015

Zadanie 35. (1 pkt)

Ciag (a_n) jest określony wzorem $a_n = (-3)^n \cdot (9 - n^2)$ dla $n \geq 1$. Wynika stąd, że

A. $a_3 = -81$

B. $a_3 = -27$

☒ C. $a_3 = 0$

D. $a_3 > 0$

$$a_3 = (-3)^3 \cdot (9 - 3^2) = 9 \cdot 0 = 0$$

CIĄGI –ZADANIA

informator maturalny od 2010

Zadanie 74. (2 pkt)

Ile wyrazów ujemnych ma ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = n^2 - 2n - 24$ dla $n \geq 1$?

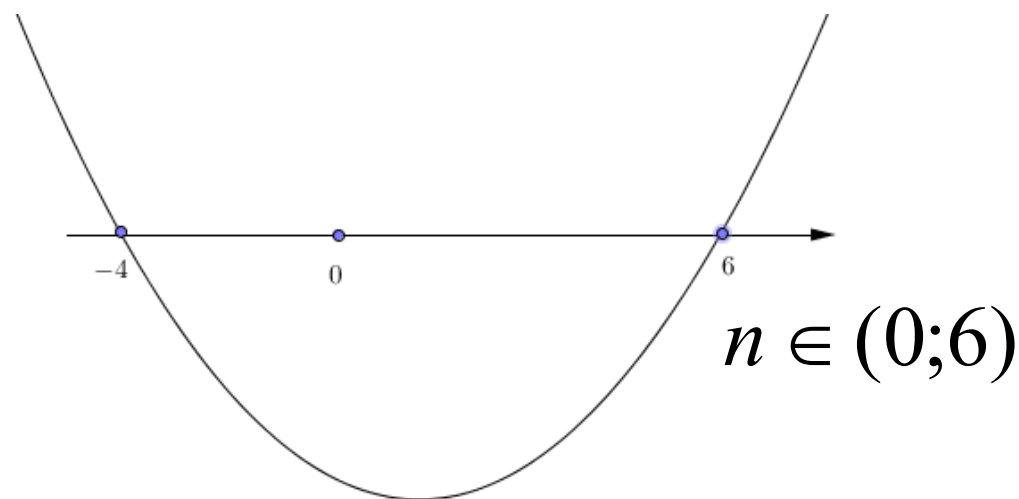
Rozwiązanie zadania sprowadza się do rozwiązania nierówności kwadratowej w zbiorze liczb naturalnych.

$$n^2 - 2n - 24 < 0$$

$$\Delta = 4 + 96 = 100$$

$$n_1 = \frac{2 - 10}{2} = -4$$

$$n_2 = \frac{2 + 10}{2} = 6$$



Ciąg ma 5 ujemnych wyrazów.