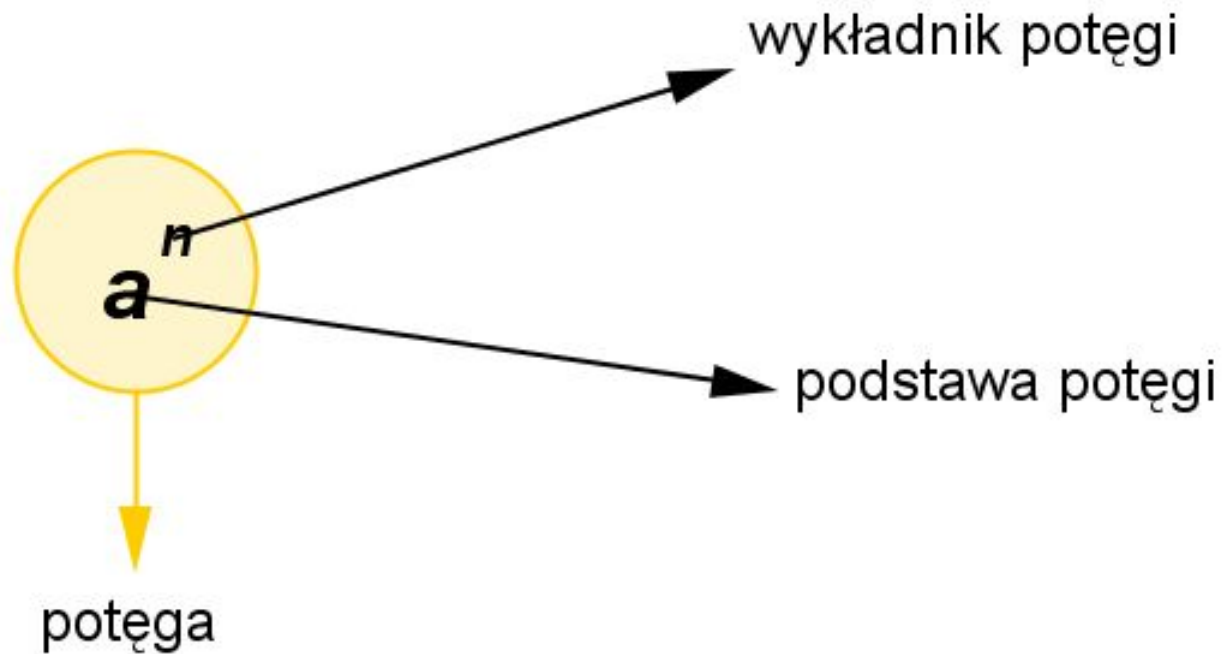


POTĘGI I POTEĞOWANIE

POTĘGOWANIE



POTĘGOWANIE

n – **tą** potęgą liczby a nazywamy
 n – **krotny** iloczyn liczby a przez siebie.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

PRZYKŁADY

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$$

$$-3^2 = -3 \cdot 3 = -9$$

$$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$$

$$\sqrt{3}^2 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{9} = 3$$

ZADANIA

Oblicz:

$$a) -4^4 =$$

$$d) \sqrt{2}^2 =$$

$$b) \left(-\frac{4}{3}\right)^3 =$$

$$e) \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3 =$$

$$c) (-3)^4 =$$

$$f) -\sqrt{10}^2 =$$

WYKŁADNIKI CAŁKOWITE

Jeżeli n jest liczbą naturalną to $-n$ jest liczbą całkowitą przeciwną do n .

Rozważmy symbol:

$$a^{-n}$$

wykładnik jest w tym przypadku liczbą ujemną.

WYKŁADNIKI CAŁKOWITE

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a} \right)^n = \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a}}_n$$

$$a^0 = 1$$

PRZYKŁADY

$$2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$(-3)^{-4} = \left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$$

$$\sqrt{5}^{-2} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5}$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{-4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{16}$$

ZADANIA

Oblicz:

$$a) \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} =$$

$$c) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{-1} =$$

$$b) \left(\frac{\sqrt{7}}{2} \right)^{-3} =$$

$$d) \frac{2}{(\sqrt{8})^{-1}} =$$

MNOŻENIE POTĘG O TYCH SAMYCH PODSTAWACH

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$2^5 \cdot 2^{-3} = 2^{5+(-3)} = 2^2$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4+(-2)} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$



MNOŻENIE POTĘG O TYCH SAMYCH PODSTAWACH - przykłady

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3+3} = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4+(-3)} = \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}$$

$$3^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^4 \cdot 3^2 = 3^{4+2} = 3^6$$

MNOŻENIE POTĘG O TYCH SAMYCH PODSTAWACH – zadania do wykonania

$$15^2 \cdot 15^{-3} =$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-5} =$$

$$2^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} =$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 =$$

DZIELENIE POTĘG O TYCH SAMYCH PODSTAWACH

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} : \left(\frac{1}{3}\right)^{-7} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4-(-7)} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

$$\frac{\sqrt{2}^5}{\sqrt{2}^3} = \sqrt{2}^{5-3} = \sqrt{2}^2 = 2$$

DZIELENIE POTĘG O TYCH SAMYCH PODSTAWACH - przykłady

$$5^{-5} : 5^{-7} = 5^{-5-(-7)} = 5^2$$

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^8}{\left(\frac{1}{3}\right)^6} = \left(\frac{1}{3}\right)^{8-6} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\frac{4^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}} = \frac{4^2}{4^3} = 4^{2-3} = 4^{-1} = \frac{1}{4}$$

DZIELENIE POTĘG O TYCH SAMYCH PODSTAWACH – zadania do wykonania

$$7^2 : 7^{-1} =$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^4 : 5^{-2} =$$

$$\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}}{\left(\frac{5}{4}\right)^{-2}} =$$

$$\frac{10^3 : 10^{-2}}{10^4} =$$

DZIELENIE POTĘG O TYCH SAMYCH PODSTAWACH - przykłady

$$\frac{16^3}{4^5} = \frac{(4^2)^3}{4^5} = \frac{4^6}{4^5} = 4^{6-5} = 4^1 = 4$$

$$5^3 : \left(\frac{1}{125}\right)^{-2} = 5^3 : \left(\left(\frac{1}{5}\right)^3\right)^{-2} = 5^3 : \left(\frac{1}{5}\right)^{-6} =$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 2^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^4 = 4^{-2} \cdot 2^3 \cdot 8^{-4} = (2^2)^{-2} \cdot 2^3 \cdot (2^3)^{-4} =$$

$$2^{-4} \cdot 2^3 \cdot 2^{-12} = 2^{-4+3+(-12)} = 2^{-13}$$

MNOŻENIE POTĘG O TYCH SAMYCH WYKŁADNIKACH

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^4 = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$$

$$\sqrt{2}^3 \cdot \sqrt{3}^3 = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{3})^3 = (\sqrt{6})^3$$

MNOŻENIE POTĘG O TYCH SAMYCH WYKŁADNIKACH - przykłady

$$6^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(6 \cdot \frac{1}{2}\right)^5 = 3^5 = 243$$

$$12^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 12 \cdot 12^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 =$$

$$12 \cdot \left(12 \cdot \frac{1}{3}\right)^2 = 12 \cdot 4^2 = 12 \cdot 16 = 192$$

DZIELENIE POTEG O TYCH SAMYCH WYKŁADNIKACH

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\frac{36^2}{9^2} = \left(\frac{36}{9}\right)^2 = 4^2 = 16$$

$$\frac{\sqrt{4}^3}{4^3} = \left(\frac{\sqrt{4}}{4}\right)^3 = \left(\frac{2}{4}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

DZIELENIE POTĘG O TYCH SAMYCH WYKŁADNIKACH - przykłady

$$\frac{64^3}{8^3} = \left(\frac{64}{8}\right)^3 = 8^3 = 512$$

$$\frac{5^4 \cdot 6^3}{30^3} = \frac{5 \cdot 5^3 \cdot 6^3}{30^3} = \frac{5 \cdot (5 \cdot 6)^3}{30^3} = \frac{5 \cdot 30^3}{30^3} = 5 \cdot \left(\frac{30}{30}\right)^3 = 5$$

POTĘGOWANIE POTĘGI

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$(3^2)^{-3} = 3^{-6}$$

$$8^4 = (2^3)^4 = 2^{12}$$

$$(\sqrt{5}^2)^5 = \sqrt{5}^{10}$$

PRZYKŁADY

Oblicz: .

Rozwiązanie:

$$\frac{x^2 : (x^{-3})^{-2}}{(x^5)^{-1} \cdot x^6}$$

$$\frac{x^2 : (x^{-3})^{-2}}{(x^5)^{-1} \cdot x^6} = \frac{x^2 : x^6}{x^{-5} \cdot x^6} = \frac{x^{2-6}}{x^{-5+6}} = \frac{x^{-4}}{x^1} = x^{-4-1} = x^{-5}$$

DZIAŁANIA NA POTEŃGACH

$$\frac{36^2 \cdot 100^2}{5^4 \cdot 3^4} = \frac{(6^2)^2 \cdot (10^2)^2}{5^4 \cdot 3^4} = \frac{6^4 \cdot 10^4}{5^4 \cdot 3^4} = \frac{(2 \cdot 3)^4 \cdot (2 \cdot 5)^4}{5^4 \cdot 3^4}$$

$$\frac{\cancel{3^4} \cdot 2^4 \cdot \cancel{5^4} \cdot 2^4}{\cancel{5^4} \cdot \cancel{3^4}} = 2^4 \cdot 2^4 = 2^8$$

ZADANIA – do wykonania

1. Zapisz w postaci potęgi y :

$$\frac{y^{-1} : (y^2)^{-3} \cdot y^2}{(y^2 : y^{-3})^2}$$

2. Zapisz w postaci potęgi liczby 2:

$$\frac{8 \cdot 2^{-4} : 4^{-3}}{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} : \frac{1}{16}\right)^2}$$

POTĘGI O WYKŁADNIKACH WYMIERNYCH

DEFINICJA:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

PRZYKŁADY:

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2 \text{ bo } 2^3 = 8$$

$$81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3 \text{ bo } 3^4 = 81$$

$$\left(-\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-\frac{1}{32}} = -\frac{1}{2} \text{ bo } \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32}$$

PRZYKŁADY

$$125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5 \text{ bo } 5^3 = 125$$

$$\left(\frac{625}{256}\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{256}{625}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{256}{625}} = \frac{4}{5} \text{ bo } \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{256}{625}$$

$$(-64)^{\frac{1}{4}} = \text{nie istnieje}$$

$$\left(-\frac{1}{128}\right)^{-\frac{1}{7}} = \left(-\frac{1}{128}\right)^{-\frac{1}{7}} = (-128)^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{-128} = -2 \text{ bo } (-2)^7 = -128$$

POTĘGI O WYKŁADNIKACH WYMIERNYCH

DEFINICJA:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

PRZYKŁAD:

$$8^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$16^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = (2)^3 = 8$$

PRZYKŁADY

$$(-27)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{-27}\right)^2 = (-3)^2 = 9$$

$$(-16)^{-\frac{3}{4}} = \text{nie istnieje}$$

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{\frac{4}{9}}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

$$81^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{81}\right)^3 = 3^3 = 27$$

POTĘGA O WYKŁADNIKU WYMIERNYM – zadania do wykonania

Oblicz:

$$a) 9^{\frac{5}{2}} =$$

$$b) 25^{-\frac{3}{2}} =$$

$$c) (-81)^{\frac{3}{2}} =$$

$$d) \left(-\frac{64}{125}\right)^{-\frac{2}{3}} =$$

POTĘGA O WYKŁADNIKU WYMIERNYM – przykłady

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot (3^2)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}} = 3^{\frac{3}{6} + \frac{4}{6}} = 3^{\frac{7}{6}}$$

$$\frac{\sqrt{216} \cdot 6^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{36}} = \frac{216^{\frac{1}{2}} \cdot 6^{\frac{1}{2}}}{36^{\frac{1}{3}}} = \frac{(6^3)^{\frac{1}{2}} \cdot 6^{\frac{1}{2}}}{(6^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{6^{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}}}{6^{\frac{2}{3}}} = 6^{2 - \frac{2}{3}} = 6^{\frac{4}{3}}$$

POTĘGA O WYKŁADNIKU WYMIERNYM – zadania do wykonania

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} =$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{9}} \cdot \sqrt{27} =$$

$$\frac{\sqrt{125} \cdot 5^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[3]{25}} =$$